Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

6/7/2012

1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{\tan(\alpha z)}{1 - 2\sin^2(\pi z)} \qquad , \quad \alpha \text{ parametro reale}$$

- indicarne gli zeri e le singolarità, discutendo la dipendenza dai possibili valori di α. Non dimenticare la discussione del punto all'infinito.
- Per $\alpha = \pi$, sviluppare la funzione in serie di potenze in un intorno di $z = 1/2$ e precisare il raggio di convergenza.

2. Calcolare i primi tre coefficienti dello sviluppo della funzione

$$y = \sin^2(\pi x)$$

sui polinomi di Legendre. Si ricorda che i polinomi di Legendre formano una base in $L^2[-1,1]$ e che $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Trascurare ogni fattore di normalizzazione.

3. Calcolare il seguente integrale, usando opportunamente le proprietà delle trasformate di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

devi vederla come convoluzione

$x - y \big|_{y=0}$

calcolata in 0

per valori $a, b > 0$ [Suggerimento: pensare l'integrale come convoluzione].

4. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x & -1 < x < 0 \\ 1 - x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

5. Date le due funzioni nel piano complesso

$$\frac{\log(z+i)}{z^2} \qquad , \qquad \sqrt{z^2 + 1}$$

determina~~re le~~ loro singolarità e indicare come si possono ottenere i campi di olomorfia.